Etude d'une fonction définie par une intégrale

Préliminaire :

Soit $f : \mathbb{R}^{+}* \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante.
On définit une fonction $\varphi : \mathbb{R}^{+}* \to \mathbb{R}$ par : $\forall x > 0, \varphi(x) = xf(x)$.
On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{R}^{+}*$ tel que $\forall x > 0, \varphi(x+T) = \varphi(x)$.

a. Soit $x, y \in \mathbb{R}^{+}*$ tels que $x \leq y$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\varphi(y)}{y+nT} \leq \dfrac{\varphi(x)}{x+nT}$

puis que $\varphi(y) \leq \varphi(x)$.

b. Conclure que φ est une fonction constante.

Problème :

On note I l'intervalle $]-1/2, +\infty[$.

Pour $x \in I$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{x+1}}$.

1.a Montrer que la fonction F est bien définie et qu'elle est à valeurs strictement positives.

1.b Calculer $F(0)$.

1.c Calculer $F(1/2)$ en s'appuyant sur le changement de variable $t = \tan u$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}^{+}$ fixé, on note $g_t : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_t(x) = \dfrac{1}{(1+t^2)^{x+1}}$.

2.a Etudier la monotonie de g_t et en déduire que F est décroissante.

2.b Etudier la convexité de g_t et en déduire que F est convexe.

3. Dans cette question on désire établir la continuité de la fonction f.
On se donne $a \in I$.

3.a Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{a+1}} dt$ est bien définie.

3.b Etablir que pour tout $x, y \geq a$ et tout $t \in [0, +\infty[$,

on a $\left| \dfrac{1}{(1+t^2)^{y+1}} - \dfrac{1}{(1+t^2)^{x+1}} \right| \leq |y-x| \dfrac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^{a+1}}$.

3.c En déduire que F est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$ puis que F est continue sur I.

4.a Soit $x \in I$.

Etablir la relation $F(x+1) = \dfrac{2x+1}{2x+2} F(x)$.

4.b Calculer $F(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^{+}* \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x > 0, \varphi(x) = xF(x)F(x-\dfrac{1}{2})$.

5.a Montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi(x+\dfrac{1}{2}) = \varphi(x)$.

5.b En déduire que φ est une fonction constante et donner la valeur de cette constante.

5.c Déterminer un équivalent simple de F en $-\dfrac{1}{2}$.

5.d Déterminer un équivalent simple de F en $+\infty$.